T O P O L O G I A

WPPT I, sem. letni
LISTA 10

Wrocław, 16 maja 2010

ZADANIE 0. Sprawdź w notatkach z wykładu co zostało przeznaczone do samodzielnego uzupełnienia i uzupełnij to.

ZADANIE 1. Udowodnij, że jeśli $f : X \to Y$ jest ciągłą funkcją różnowartościową określoną na przestrzeni zwartej metrycznej o wartościach w przestrzeni metrycznej, to f jest homeomorfizmem pomiędzy X a $f(X)$.

ZADANIE 2. Które z następujących podzbiorów $C(X)$ są domknięte, które całkowicie ograniczone, a które zwarte w metryce supremum:

a) zbiór funkcji Lipschitzowskich o stałych Lipschitza ograniczoych przez pewną stałą M i zerujących się w ustalonym punkcie x_0;

b) dla $X = [0, 1]$, zbiór funkcji różniczkowalnych o pochodnej ograniczonej przez M i zerujących się w jakimś ustalonym punkcie;

c) dla $X = [0, 1]$, zbiór wielomianów stopnia $\leq N$ zerujących się w zerze;

d) dla $X = [0, 1]$, zbiór wielomianów dowolnego stopnia o wszystkich współczynnikach ograniczonych przez M;

e) dla $X = [0, 1-\epsilon]$, zbiór wielomianów dowolnego stopnia o wszystkich współczynnikach ograniczonych przez M;

f) dla $X = [0, 1]$, zbiór wielomianów stopnia $\leq N$ i o wszystkich współczynnikach ograniczonych przez M.

ZADANIE 3. Rozważmy przeliczalny produkt $X = X_1 \times X_2 \times \cdots$ przestrzeni metrycznych (X_n, d_n) ograniczonych o średnicach 1 (tzn. każda z metryk d_n nie przekracza wartości 1). Elementami tego produktu są ciągi postaci (x_n) takie, że $\forall_{n\in\mathbb{N}}\ x_n \in X_n$. W produkcie tym rozważmy metrykę "z szeregiem uzbieżniającym"

$$d((x_n), (y_n)) = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} d_n(x_n, y_n).$$

Udowodnij, że zbieżność w tej metryce jest równoważna ze zbieżnością po współrzędnych:

$$(x_n^k) \xrightarrow[k\to\infty]{d} (x_n) \iff \forall_{n\in\mathbb{N}}\ \ x_n^k \xrightarrow[k\to\infty]{d_n} x_n.$$

ZADANIE 4. Uzasadnij jednym zdaniem dlaczego przeliczalny produkt zbiorów Cantora z metryką z szeregiem uzbieżniającym jest po prostu (homeomorficzny ze) zbiorem Cantora.

ZADANIE 5. Udowodnij, że odcinek $[0, 1]$ nie jest sumą dwóch rozłącznych niepustych zbiorów domkniętych A, B.
Wsk. Zbadaj liczby $\sup A$ *i* $\sup B$ *(dwa przypadki).*

ZADANIE 6. Udowodnij, że każdy domknięty co najmniej dwupunktowy podzbiór zbioru Cantora jest sumą dwóch rozłącznych niepustych zbiorów domkniętych.

Wywnioskuj stąd, że zbiór Cantora nie zawiera homeomorficznej kopii odcinka damkniętego.

ZADANIE 7. Przeczytaj i zrozum konstrukcję „schodkowej" surjekcji $f : \mathfrak{C} \to [0,1]$ (patrz załącznik). Wiadomo, że jako funkcja ciągła na zbiorze zwartym jest ona jednostajnie ciągła. Czy funkcja ta jest Lipschitzowska? Czy może w ogóle istnieć Lipschitzowska surjekcja z $\mathfrak{C}$ na $[0,1]$? Odpowiedź uzasadnij.
Wsk. Jaka jest suma długości wszystkich odcinków rzędu n?

Tomasz Downarowicz